یافتن مقدار تابع درونی در توابع مرکب

تعریف: گاهی، ضابطه تابع مرکب fog و تابع f (بیرونی) را میدهند و مقدار تابع g (درونی) در $x=a$ یعنی $g(a)$ را میخواهند. برای حل به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

1. در ضابطه تابع مرکب $fog(x)$ به جای همه x ها، a قرار میدهیم تا به $fog(a)$ برسیم.
2. در ضابطه تابع $f(x)$ به جای همه x ها، $g(x)$ قرار میدهیم تا به $f(g(a))$ برسیم.
3. با برابر قرار دادن $fog(a)$ و $f(g(a))$ مقدار $g(a)$ را حساب میکنیم.

تست: اگر $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ و $(fog)(x) = \frac{x^2+2}{x^2+1}$ باشد، مقدار $g(1)$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵ ✓

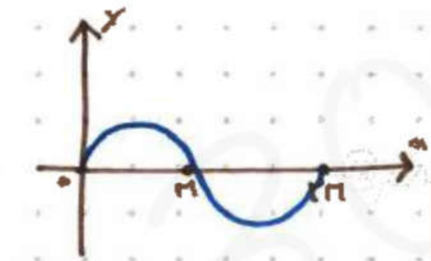
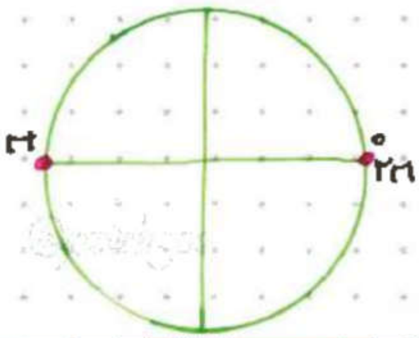
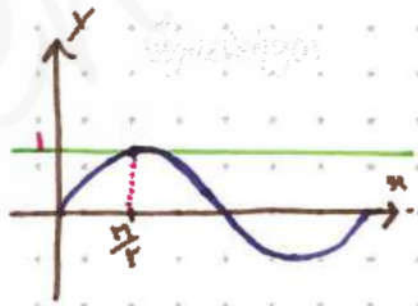
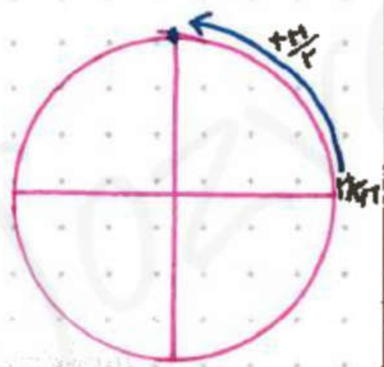
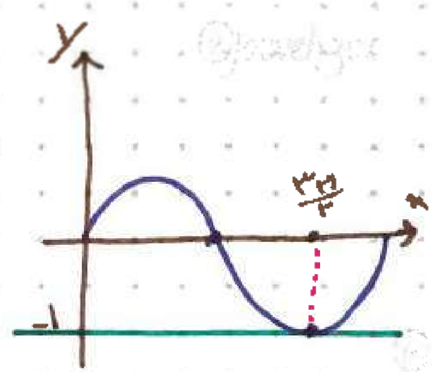
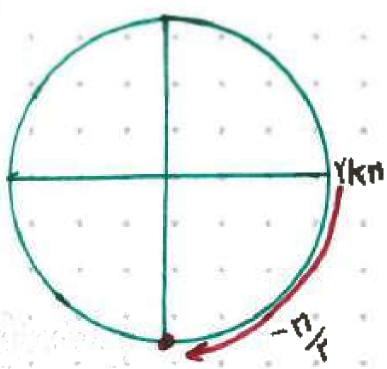
جواب:

$$\begin{cases} (fog)(1) = f(g(1)) = \frac{1^2+2}{1^2+1} = \frac{3}{2} \rightarrow \boxed{f(g(1)) = \frac{3}{2}} \\ f(g(1)) = \frac{g(1)+1}{g(1)-1} \end{cases}$$

$$\rightarrow \frac{g(1)+1}{g(1)-1} = \frac{3}{2} \rightarrow 2g(1)+2 = 3g(1)-3 \rightarrow \boxed{g(1)=5}$$

حالات خاص معادلهٔ سینوسی

حالت‌های خاص معادلهٔ سینوسی به صورت زیر است:

جوابهای کلی	تعبیر هندسی در بازهٔ $[0, 2\pi]$	مکان روی دایره	معادله
$x = k\pi$			$\sin x = 0$
$x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$			$\sin x = 1$
$x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$			$\sin x = -1$

حدهای یک طرفه نامتناهی

توصیف حدهای یک طرفهٔ نامتناهی به صورت زیر است:

مفهوم	بازهٔ تعریف برای f	حد	نمودار f
مقادیر f را می‌توان از هر عدد مثبت دلخواه بزرگتر کرد به شرط آنکه بتوان x را با مقادیر بزرگتر از a، به قدر کافی به a نزدیک کرد.	همسایگی راست a	$\lim_{x\to a^+} f(x)=+\infty$	 $x=a$
مقادیر f را می‌توان از هر عدد منفی دلخواه کوچکتر کرد به شرط آنکه بتوان x را با مقادیر بزرگتر از a به قدر کافی به a نزدیک کرد.	همسایگی راست a	$\lim_{x\to a^+} f(x)=-\infty$	 $x=a$
مقادیر f را می‌توان از هر عدد مثبت دلخواه بزرگتر کرد به شرط آنکه بتوان x را با مقادیر کوچکتر از a به قدر کافی به a نزدیک کرد.	همسایگی چپ a	$\lim_{x\to a^-} f(x)=+\infty$	 $x=a$

ادامه — حدهای یک طرفه نامتناهی

مفهوم	بازه تعریف f	حد	نمودار f
مقادیر f را می‌توان از هر عدد منفی دلخواه کوچکتر کرد به شرط آنکه بتوان x را با مقادیر کوچکتر از a به قدر کافی به a نزدیک کرد.	همسایگی راست a	$\lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty$	 $x=a$

نکته ۱: اگر $\lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x\to a^-} f(x) = +\infty$ آنگاه: $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ و برعکس.

نکته 2: به طور مشابه اگر $\lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty$ آنگاه: $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$ و برعکس.

مثال:

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{1}{(x-2)^2} = +\infty$$

و

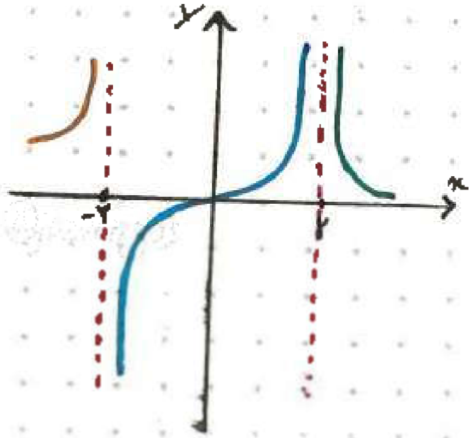
$$\lim_{x\to 2^-} \frac{1}{(x-2)^2} = +\infty$$

درنتیجه

$$\lim_{x\to 2} \frac{1}{(x-2)^2} = +\infty$$

تست

نمودار تابع f به صورت مقابل است. حاصل کدام گزینه با بقیه متفاوت است؟



۱) $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$

۲) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$

۳) $\lim\limits_{x\to (-2)^+} f(x)$ ✓

۴) $\lim\limits_{x\to (-2)^-} f(x)$

جواب

* با توجه به گزینه‌ها حد چپ و راست تابع را در $x=2$ و $x=-2$ بررسی می‌کنیم:

گزینه‌ی ۱ و ۲ $\rightarrow$ $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = +\infty$

گزینه ۳ $\rightarrow$ $\lim\limits_{x\to (-2)^+} f(x) = -\infty$

گزینه ۴ $\rightarrow$ $\lim\limits_{x\to (-2)^-} f(x) = +\infty$